ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

15/5/18

Θεωρούμε το $X = [0,1] \cup [2,3]$ με τη συνήθη μετρική
τα $[0,1]$, $[2,3]$ είναι ανοιχτά (και κλειστά) υποσύνολα του X.

$[0,1]$ ανοιχτό
Έστω $x \in [0,1]$
$B_\rho(x,1) = \{y \in X : |y-x| < 1\} \subseteq [0,1]$
Άρα το $[0,1]$ είναι ανοιχτό στο X

Ορισμός

Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) λέγεται συνεκτικός αν δεν υπάρχουν δύο μη κενά, ξένα ανοιχτά σύνολα υποσύνολα A, B του X ώστε $X = A \cup B$.

Ένα υποσύνολο E ενός μετρικού χώρου (X,ρ) λέγεται συνεκτικό αν ο (E,ρ_E) (όπου ρ_E η σχετική μετρική)
είναι συνεκτικός χώρος

[δηλ. αν δεν υπάρχει δύο μη κενά ξένα υποσύνολα A, B του E με A, B ανοιχτά στο E ώστε $E = A \cup B$]

Παρατήρηση

Ο X είναι συνεκτικός αν και μόνο αν δεν υπάρχουν δυο μη κενά ξένα κλειστά υποσύνολα A, B του X ώστε $X = A \cup B$
(εφόσον συμπληρώματα ανοιχτών είναι κλειστά)

Παραδείγματα

α) Ο $X = [0,1) \cup [2,3]$ με τη συνήθη μετρική δεν είναι συνεκτικός

β) Αν ένα σύνολο X έχει δύο τουλάχιστον στοιχεία και ρ η διακριτή μετρική στο X
Τότε το X δεν είναι συνεκτικός.

γ) Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$

$A = \{q \in \mathbb{Q},\ q > \sqrt{2}\} = \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, +\infty)$
$B = \{q \in \mathbb{Q},\ q < \sqrt{2}\} = \mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})$

Τα σύνολα A, B είναι ανοικτά στο $\mathbb{Q}$
(διότι τα $(\sqrt{2}, +\infty)$, $(-\infty, \sqrt{2})$ είναι ανοικτά στο $\mathbb{R}$)
και $A \cup B = \mathbb{Q}$

Πρόταση

Έστω X μετρικός χώρος. Τ.Α.Ε.Ι. (i) Ο X είναι συνεκτικός
(ii) Τα μόνα υποσύνολα του X που είναι ταυτόχρονα ανοικτά και κλειστά υποσύνολα του X είναι το $\emptyset, X$
(iii) Δεν υπάρχει $f: X \to \{0,1\}$ συνεχής και επί

(i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω A ένα υποσύνολο του X που είναι ταυτόχρονα ανοιχτό και κλειστό. Τότε τα A, $X-A$ είναι ανοιχτά και ξένα υποσύνολα του X.
Επειδή ο X είναι συνεκτικός έχουμε $A=\emptyset$ ή $X-A=\emptyset$

$$\Downarrow$$

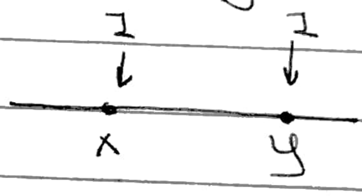
$$A=X.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Αν υπάρχει $f: X \to \{0,1\}$ συνεχής και επί. Τότε επειδή το $\{0\}$ είναι ανοιχτό και κλειστό στο $\{0,1\}$ και η f συνεχής το $A=f^{-1}(\{0\})$ είναι ανοιχτό και κλειστό στο X.
Επειδή η f είναι επί προκύπτει $A\neq\emptyset$ και $A\neq X$.
Άρα άτοπο από υπόθεση.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι ο X ~~είναι~~ δεν είναι συνεκτικός.
Τότε υπάρχουν δύο μη κενά ξένα ανοιχτά υποσύνολα A, B του X ώστε $X = A\cup B$.
Ορίζουμε $f: X\to\{0,1\}$ με $f(x)=\begin{cases}0, & x\in A\\ 1, & x\in B\end{cases}$

Τότε η f είναι συνεχής και επί
($f^{-1}(\{0\})=A$ ανοιχτό (και κλειστό)
$f^{-1}(\{1\})=B$ ανοιχτό (και κλειστό)

Ένα υποσύνολο I του $\mathbb{R}$ λέγεται <u>διάστημα</u> αν για κάθε $x,y\in I$ με $x<y$ και κάθε $z\in\mathbb{R}$ με $x<z<y$ να ισχύει το $z\in I$.



Τα μόνα διαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι τα σύνολα της μορφής:
(το $\emptyset$)
$\{a\}$ για $a\in\mathbb{R}$
(a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b)$ για $a,b\in\mathbb{R}$ με $a<b$

$(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$ $\forall a \in \mathbb{R}$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Το E είναι συνεκτικό αν-ν είναι διάστημα.

Απόδειξη: Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ που δεν είναι διάστημα
(και θα δείξουμε ότι δεν είναι διάστημα)
Τότε υπάρχουν $x, y \in E$ με $x<y$ και $z \in \mathbb{R}$ με $x<z<y$
ώστε $z \notin E$. Θέτουμε $A = E \cap (-\infty, z)$
$B = E \cap (z, +\infty)$

$A \neq \emptyset$ (διότι $x \in A$) $B \neq \emptyset$ (διότι $y \in B$)
Το A, B είναι ανοικτό υποσύνολο του E (διότι $(-\infty, z)$, $(z, +\infty)$ είναι ανοικτά στο $\mathbb{R}$)

$A \cap B = \emptyset$
και $A \cup B = (E \cap (-\infty, z)) \cup (E \cap (z, +\infty)) = E \cap (\mathbb{R} - \{z\}) = E$
διότι $z \notin E$

Άρα το E δεν είναι συνεκτικό

Έστω τώρα E ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ θα αποδείξουμε ότι το E είναι συνεκτικό. Υποθέτω (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι το E δεν είναι συνεκτικό.

Τότε $\exists$ δύο μη κενά υποσύνολα του E ώστε $E = A \cup B$
Επιλέγουμε $a \in A$ και $b \in B$. Τότε $a<b$ και $b<a$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτω ότι $a<b$
(σε διαφ. ~~περίπτωση~~ περίπτωση εναλλάσσουμε το ρόλο των A, B)
Εφόσον E διάστημα και $a, b \in E$, $[a, b] \subseteq E$
Εφόσον τα A, B είναι ανοικτά στο E και $a \in A$, $b \in B$
υπάρχουν $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ ώστε $[a, a+\delta_1) \subseteq A$, $(b-\delta_1, b] \subseteq B$

Σημείωση: Δεν γνωρίζουμε αν το a είναι το αριστερό άκρο του E. Αν δεν είναι θα μπορούσαμε να γράψουμε ~~(α-δ,α)~~ $(a-\delta_1, a+\delta_1) \subseteq A$ ομοίως για το B.

Θέτουμε $\Gamma = \{t \geq a : [a,t] \subseteq A\}$

Τότε $\Gamma \neq \emptyset$ (ισχύει $t \in \Gamma$, $\forall t \in [a, a+\delta_1)$) και το b είναι άνω φράγμα του Γ (διότι αν το $t > b$ με $t \in \Gamma$ τότε $[a,t] \in A$ άρα $b \in A$ άτοπο)

Θέτουμε $x = \sup \Gamma$. Τότε $a < x < b$, άρα $x \in E$, άρα $x \in A$ $x \in B$.

1η περίπτωση: $x \in A$

Τότε $x < b$ εφόσον το A είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$. Συνεπώς, $[x, x+\frac{\varepsilon}{2}] \subseteq A$ και εφόσον $[a, x) \subseteq A$ προκύπτει $[a, x+\frac{\varepsilon}{2}] \subseteq A$ δηλ. $x + \frac{\varepsilon}{2} \in \Gamma$ άτοπο διότι $x = \sup \Gamma$

2η περίπτωση: $x \in B$

Εφόσον το B είναι ανοικτό στο E, $\exists \varepsilon > 0$ $(x-\varepsilon, x] \subseteq B$.
Τότε ο αριθμός $x-\varepsilon$ είναι άνω φράγμα του Γ άτοπο (διότι $x-\varepsilon < x = \sup \Gamma$

Επομένως (αφού καταλήξαμε σε άτοπο και στις 2 περιπτώσεις) το E είναι συνεκτικό.

Πρόταση: Έστω (X,ρ) μ.χ. Αν $(C_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια από συνεκτικά υποσύνολα του X ώστε $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$. Τότε το $\bigcup_{i\in I} C_i$ είναι ανοικτό.

Απόδειξη: Έστω $x_0 \in \bigcap_{i\in I} C_i$. Έστω $f: \bigcup_{i\in I} C_i \Rightarrow \{0,1\}$ συνεχής (και θα δ.ο. η f δεν είναι επί)

Για κάθε $i\in I$ ο περιορισμός $f/_{C_i}$ $C_i \to \{0,1\}$ είναι συνεχής και (εφόσον το C_i είναι συνεκτικό) δεν είναι επί.

Εφόσον ~~αυτό~~ $f(x_0) \in (f/_{C_i})(C_i)$

συμπεραίνω ότι $f(x)=f(x_0)$ $\forall x \in C_i$

Εφόσον αυτό συμβαίνει $\forall i\in I$ έχουμε $f(x)=f(x_0)$ $\forall x \in \bigcup_{i\in I} C_i$

Συνεπώς η f δεν είναι επί του $\{0,1\}$

Επομένως το $\bigcup_{i\in I} C_i$ είναι συνεκτικό